Theorie Woche 6:

∘ Koordinaten in einer bestimmten Basis: Skript S. 61

Ein kleines Beispiel findet sich im Skript. Ich möchte jedoch genauer darauf eingehen:

Jedes Element $\underline{x}$ eines Vektorraumes V lässt sich, bezüglich einer bestimmten Basis B des V.R., als Linearkombination der Basisvektoren folgendermassen darstellen:

$$\underline{x} = x_1 \cdot \underline{b}^{(1)} + x_2 \cdot \underline{b}^{(2)} + \dots + x_n \cdot \underline{b}^{(n)}$$

mit $x_1, x_2, \dots, x_n$ die Koordinaten von $\underline{x}$ bezüglich der Basis B, man schreibt auch $[\underline{x}]_B$, und $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n$ die Spaltenvektoren der Basis B.

Beispiel 6.1:

Gegeben folgende V.R. $V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{R} \right\}$ mit

der Basis $\underline{\underline{B}} = [\underline{b}_1 \ \underline{b}_2] = \begin{bmatrix} \underbrace{\boxed{\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}}}_{\underline{b}_1} & \underbrace{\boxed{\begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix}}}_{\underline{b}_2} \end{bmatrix}$. Suchen den Koordinatenvektor von $\underline{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \end{bmatrix}$ bzgl. B, also $[\underline{v}]_B$:

$[\underline{v}]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, wir wissen $\underline{v} = x_1 \cdot \underline{b}_1 + x_2 \cdot \underline{b}_2$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Kennen wir schon? $\rightsquigarrow$ Gaussverfahren:

$$x_1 = \frac{40}{7}, \quad x_2 = -\frac{22}{7} \quad \Rightarrow \quad [\underline{v}]_B = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 40 \\ -22 \end{bmatrix}$$

Beispiel 6.2: Anwendung der Koordinatendarstellung zur Findung einer Basis eines UVR:

Gegeben folgender Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$:

$$U := \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \}$$

und wir sollen nun eine Basis von U bestimmen.

$\Rightarrow$ U ist die Lösungsmenge des (aus einer Gleichung bestehende) LGS $x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$. Zur Parametrisierung dieser Lösungsmenge kann man z.B. x_1, x_3 und x_4 als freie Parameter wählen und erhält dann $x_2 = 2x_3 - x_4$, d.h. man kann U schreiben als

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

und wegen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_1 \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}^{b_1} + x_3 \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}^{b_2} + x_4 \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^{b_3}$$

finden wir die Basis

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Beispiel 6.3: Koordinaten in einem Funktionenraum:

Sei P_2 der V.R. der reellen Polynome vom Grad ≤ 2. Sei

$$B = \{ b^{(1)} = 1,\ b^{(2)} = x-1,\ b^{(3)} = x^2 \}$$

eine Basis in P_2.

Schreiben Sie $p(x) = 7x^2 - 4x + 4$ in den Koordinaten der Basis B:

$$\Rightarrow 7x^2 - 4x + 4 \overset{!}{=} a_1 \cdot (x^2) + a_2 \cdot (x-1) + a_3 \cdot (1)$$

Durch Koeffizientenvergleich findet man leicht

$$a_1 = 7, \quad a_2 = -4, \quad a_3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad [p(x)]_B = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

○ Koordinatentransformation und Basiswechsel:

Skript S. 81

Da es in einem beliebigen Vektorraum immer mehr als eine mögliche Basis gibt, müssen wir auch die Möglichkeit behandeln, zwischen diesen Basen zu wechseln.

Eine perfekte Einführung in die Thematik findet sich im Skript auf S. 81.

Wir behandeln die darin behandelte lineare (Selbst) Abbildung nächste Woche! (überlegt euch mal, warum es sich wohl um eine Selbstabbildung handelt)

Dem aufmerksamen Leser ist mittlerweile bestimmt schon aufgefallen, dass wir oben in Beispiel 6.1 & 6.3 bereits Basiswechsel vollführt haben, ohne es bewusst zu merken. Denn wir haben von den Standardbasen $\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right.$ im $\mathbb{R}^2$ und $1, x, x^2$ im $\mathcal{P}_2\left.\right)$, die wir bis anhin <u>immer</u> angenommen haben, in andere Basen gewechselt!

Dies ist natürlich der einfachste Fall, wir können auch zwischen zwei komplett unterschiedlichen Basen wechseln.

Beispiel 6.4:

Sei V mit $\mathcal{B} := \{ \underbrace{1}_{b^{(1)}}, \underbrace{t}_{b^{(2)}}, \underbrace{t^3}_{b^{(3)}} \}$ & $\tilde{\mathcal{B}} := \{ \underbrace{3t}_{\tilde{b}^{(1)}}, \underbrace{2t^3+2}_{\tilde{b}^{(2)}}, \underbrace{t+1}_{\tilde{b}^{(3)}} \}$

Wollen nun die Basiswechselmatrix von $\tilde{\mathcal{B}}$ nach $\mathcal{B}$ finden, hierfür schreiben wir die Basisvektoren von $\tilde{\mathcal{B}}$ als Linearkombination der Basisvektoren von $\mathcal{B}$: ((5.41) im Skript)

$$\tilde{b}^{(1)} = a_1 \cdot b^{(1)} + a_2 \cdot b^{(2)} + a_3 \cdot b^{(3)} = \boxed{0} \cdot b^{(1)} + \boxed{3} \cdot b^{(2)} + \boxed{0} \cdot b^{(3)}$$
$$\tilde{b}^{(2)} = a_1 \cdot b^{(1)} + a_2 \cdot b^{(2)} + a_3 \cdot b^{(3)} = \boxed{2} \cdot b^{(1)} + \boxed{0} \cdot b^{(2)} + \boxed{2} \cdot b^{(3)}$$
$$\tilde{b}^{(3)} = a_1 \cdot b^{(1)} + a_2 \cdot b^{(2)} + a_3 \cdot b^{(3)} = \boxed{1} \cdot b^{(1)} + \boxed{1} \cdot b^{(2)} + \boxed{0} \cdot b^{(3)}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

⚠ Das Fehlende drehen der Koordinaten ist ein sehr häufiger Fehler!

Betrachten wir nun z.B. $g(t) = 5t + 2t^3$

Durch Koeffizientenvergleich finden wir einfach:

$$[g(t)]_{\tilde{B}} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \frac{7}{3} \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}}} \quad \left(\hat{=} \ \frac{7}{3} \cdot (3t) + 1 \cdot (2t^3 + 2) - 2 \cdot (t+1) \right)$$

$[g(t)]_B$ könnte man natürlich gleich berechnen, da wir aber bereits $\underline{T}$ haben, rechnen wir einfach:

$$[g(t)]_B = \underline{T} \cdot [g(t)]_{\tilde{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{7}{3} \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}}}$$

was trivialerweise stimmt.

Für reelle Vektorräume mit Basisvektoren im üblichen Sinne (z.B. $\mathbb{R}^3$) kann man natürlich absolut analog Vorgehen. (Was ich auch sehr empfehle ☺)
Jedoch gibt es für den Fall, dass die Basen durch eine $n \times n$ - Matrix gegeben sind, noch folgenden Zusammenhang: (Zusammenstellung für Übersicht)

"Alte Basis zu neuer Basis": $\underline{\underline{B}} \cdot \underline{T} = \underline{\underline{\tilde{B}}}$

↳ alte Basisvektoren als lin. kombination der neuen Basisvektoren schreiben

"Neue Basis zu alter Basis": $\underline{\underline{\tilde{B}}} \cdot \underline{S} = \underline{\underline{B}}$

↳ neue Basisvektoren als lin. kombination der alten Basisvektoren schreiben

$$T = S^{-1}$$

Alte Koordinaten zu neuen Koordinaten: $\underline{T} \cdot \underline{\tilde{x}} = \underline{x}$

Neue Koordinaten zu alten Koordinaten: $\underline{S} \cdot \underline{x} = \underline{\tilde{x}}$

Wobei $\tilde{\underline{\underline{B}}}$ die alte und $\underline{\underline{B}}$ die neue Matrix ist.

Die beiden Gleichungen $\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{T}} = \tilde{\underline{\underline{B}}}$ und $\tilde{\underline{\underline{B}}} \cdot \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{B}}$ kann man mit dem Gauss-Jordan Algorithmus lösen, genau gleich wie bei der Inversenberechnung, nur hat man nun nicht die Einheitsmatrix auf der rechten Seite. Oder aber mittels der Inversen.

$\sim$ = alt

= neu

Erklärung: (Für Matrixfall)

$$\left.\begin{array}{ll} \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{B}}^{-1}\,\tilde{\underline{\underline{B}}} & \underline{\underline{S}} = \tilde{\underline{\underline{B}}}^{-1}\,\underline{\underline{B}} \\ \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{T}} = \tilde{\underline{\underline{B}}} & \tilde{\underline{\underline{B}}}\,\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{B}} \end{array}\right\} \text{Zusammenhang der Matrizen} \quad (1)$$

$$\underline{v} = \hat{\underline{\underline{B}}}\,\tilde{\underline{x}} \qquad \underline{v} = \underline{\underline{B}}\,\underline{x} \qquad \mid \underline{v} := \text{Darzustellende Vektor} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{T}}\,\tilde{\underline{x}} = \tilde{\underline{\underline{B}}}\,\tilde{\underline{x}} \qquad \Rightarrow \tilde{\underline{\underline{B}}}\,\underline{\underline{S}}\,\underline{x} = \underline{\underline{B}}\,\underline{x} \qquad \mid \text{setzen (1) in (2) ein}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \underline{\underline{B}}\,\underline{x} = \tilde{\underline{\underline{B}}}\,\tilde{\underline{x}} & \tilde{\underline{\underline{B}}}\,\tilde{\underline{x}} = \underline{\underline{B}}\,\underline{x} \\ \Rightarrow \underline{\underline{T}}\,\hat{\underline{x}} = \underline{x} & \Rightarrow \underline{\underline{S}}\,\underline{x} = \tilde{\underline{x}} \end{array}\right\} \text{logische Konsequenz, da } \underline{\underline{B}}\,\underline{x} = \underline{v} = \tilde{\underline{\underline{B}}}\,\tilde{\underline{x}} \text{ sein muss}$$

Obige Rechnung soll einfach die Konsistenz der Zusammenhänge zeigen.

⚠ Viele Leute vertauschen anfangs die beiden Gleichungen für die Basiswechselmatrizen, da es unintuitiv erscheint, dass

"neue Basis" · "BW-Matrix von alt nach neu" = "alte Basis"

$$\underline{\underline{B}} \qquad \cdot \qquad \underline{\underline{T}} \qquad = \qquad \tilde{\underline{\underline{B}}}$$

∘ Lineare Abbildungen: Skript S. 76 f.

Lineare Abbildungen sind der Hauptbestandteil der linearen Algebra. Die genaue Definition und die Bedingungen linearer Abbildungen sowie diverse Beispiele finden sich im Skript.